Aufgabe 1

a)

$$
\begin{aligned}
& & (C \setminus A) \setminus B &= C \setminus (A \cup B) \\
&\Leftrightarrow & \{x|x \in C \wedge x \notin A\} \setminus B &= C \setminus (A \cup B) \\
&\Leftrightarrow & \{x|x \in C \wedge x \notin A \wedge x \notin B\} &= C \setminus (A \cup B) \\
&\Leftrightarrow & \{x|x \in C \wedge x \notin A \wedge x \notin B\} &= C \setminus \{x|x \in A \vee x \in B\} \\
&\Leftrightarrow & \{x|x \in C \wedge x \notin A \wedge x \notin B\} &= \{x|x \in C \wedge \neg(x \in A \vee x \in B)\} \\
&\Leftrightarrow & \{x|x \in C \wedge x \notin A \wedge x \notin B\} &= \{x|x \in C \wedge x \notin A \wedge x \notin B\}
\end{aligned}
$$

(w)

b)

$$
\begin{aligned}
& & C \setminus (A \cap B) &= (C \setminus A) \cap (C \setminus B) \\
&\Leftrightarrow & C \setminus \{x|x \in A \wedge x \in B\} &= (C \setminus A) \cap (C \setminus B) \\
&\Leftrightarrow & \{x|x \in C \wedge \neg(x \in A \wedge x \in B)\} &= (C \setminus A) \cap (C \setminus B) \\
&\Leftrightarrow & \{x|x \in C \wedge (x \notin A \vee x \notin B)\} &= (C \setminus A) \cap (C \setminus B) \\
&\Leftrightarrow & \{x|x \in C \wedge (x \notin A \vee x \notin B)\} &= \{x|x \in C \wedge x \notin A\} \cap \{x|x \in C \wedge x \notin B\} \\
&\Leftrightarrow & \{x|x \in C \wedge (x \notin A \vee x \notin B)\} &= \{x|x \in C \wedge x \notin A \wedge x \notin B\}
\end{aligned}
$$

(f)

c)

$$
\begin{aligned}
& & C \setminus (A \cup B) &= (C \setminus A) \cup (C \setminus B) \\
&\Leftrightarrow & C \setminus \{x|x \in A \vee x \in B\} &= (C \setminus A) \cup (C \setminus B) \\
&\Leftrightarrow & \{x|x \in C \wedge \neg(x \in A \vee x \in B)\} &= (C \setminus A) \cup (C \setminus B) \\
&\Leftrightarrow & \{x|x \in C \wedge x \notin A \wedge x \notin B\} &= (C \setminus A) \cup (C \setminus B) \\
&\Leftrightarrow & \{x|x \in C \wedge x \notin A \wedge x \notin B\} &= \{x|x \in C \wedge x \notin A\} \cup \{x|x \in C \wedge x \notin B\} \\
&\Leftrightarrow & \{x|x \in C \wedge x \notin A \wedge x \notin B\} &= \{x|x \in C \wedge (x \notin A \vee x \notin B)\}
\end{aligned}
$$

(f)

Aufgabe 2

$a)$

$$\begin{aligned}
& & A \times (B \cap C) &= (A \times B) \cap (A \times C) \\
&\Leftrightarrow & (A \times B) \cap (A \times C) &= A \times (B \cap C) \\
&\Leftrightarrow & &= \{(a,x) | a \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C)\} \\
&\Leftrightarrow & &= \{(a,x) | (a \in A \wedge x \in B) \wedge (a \in A \wedge x \in C)\} \\
&\Leftrightarrow & &= \{(a,x) | a \in A \wedge x \in B\} \cap \{(a,x) | a \in A \wedge x \in C\} \\
&\Leftrightarrow & &= (A \times B) \cap (A \times C)
\end{aligned}$$

(w)

b) Seien A, B und C folgende Mengen: A={1,2}, B={2}, C={3,4}

$$\begin{aligned}
& & (A \setminus B) \times (A \setminus C) &= (A \times A) \setminus (B \times C) \\
&\Rightarrow & (\{1,2\} \setminus \{2\}) \times (\{1,2\} \setminus \{3,4\}) &= (\{1,2\} \times \{1,2\}) \setminus (\{2\} \times \{3,4\}) \\
&\Leftrightarrow & \{1\} \times \{1,2\} &= (\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\} \setminus (\{(2,3),(2,4)\} \\
&\Leftrightarrow & \{(1,1),(1,2)\} &= \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}
\end{aligned}$$

(f)

Aufgabe 3

a) **Surjektivität**
Zu zeigen: $\forall x \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \;\; \exists m \in \mathbb{Z}$, sodass gilt: f(m) = x = (m-1, 2)

Da 2 konstant ist, betrachten wir:

$$\begin{aligned} && f^*(m) &= m - 1 \\ \Rightarrow && y &= m - 1 \\ \Leftrightarrow && m &= y + 1 \end{aligned}$$

m in f^* einsetzen:

$$\begin{aligned} && f^*(m) &= m - 1 \\ \Rightarrow && f^*(y+1) &= y + 1 - 1 \\ \Leftrightarrow && f^*(y+1) &= y \end{aligned}$$

Daraus folgt: f ist surjektiv.

$g((m,n)) = m{+}n$ ist surjektiv, da jedem Bildelement (mindestens) ein Ursprungselement zugewiesen werden kann. Die Gleichung y = m+n ist für bei einem bestimmten y für beliebig viele bestimmte Kombinationen von $m, n \in \mathbb{Z}$ erfüllt.

$g \circ f$ ist nach Satz 0.4 auch surjektiv, da f und g beide surjektiv sind.

$f \circ g$ ist analog zum Beweis der Surjektivität von f auch surjektiv mit
$(f \circ g)^*((m,n)) = m + n - 1$

Injektivität
Falls aus $f(m_1) = f(m_2)$ zwangsweise $m_1 = m_2$ folgt, dann ist f injektiv.

$$\begin{aligned} & f(m_1) = f(m_2) \\ \Leftrightarrow \quad & (m_1 - 1, 2) = (m_2 - 1, 2) \\ \Leftrightarrow \quad & m_1 - 1 = m_2 - 1 \wedge 2 = 2 \\ \Leftrightarrow \quad & m_1 = m_2 \end{aligned}$$

Daraus folgt: f ist injektiv und somit bijektiv.

Falls g injektiv ist, so folgt aus $g((a,b)) = g((c,d))$ zwangsweise $(a,b) = (c,d)$

Gegenbeispiel: Aus $g((1,2)) = g((2,1))$ folgt $3 = 3$, aber die Aussage $(1,2) = (2,1)$ ist falsch. Daher ist g nicht injektiv.

$f \circ g$ ist nicht injektiv, da die resultierende Abbildung $f \circ g((m,n)) = f(g((m,n))) = f(m+n) = (m+n-1, 2)$ nicht jedem Ursprungselement eindeutig ein Bildelement zuordnet. $y = m + n - 1$ ist nicht eindeutig lösbar.

$g \circ f(m) = g(f(m)) = g((m-1,2)) = m - 1 + 2 = m + 1$ ist injektiv, da jedem Ursprungselement eindeutig ein Bildelement zugewiesen wird. (Die resultierende Funktion ist linear.) Somit ist $g \circ f$ bijektiv.

b)

$$\begin{aligned} & h(a) = 3 * a + 2 \\ \Leftrightarrow \quad & y = 3 * a + 2 \\ \Leftrightarrow \quad & a = \frac{y-2}{3} \\ & \quad = h^{-1}(y) \\ \Rightarrow \quad & h^{-1}(y) = \frac{y-2}{3} \end{aligned}$$

Für $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ gibt es keine inverse Abbildung, da nicht $\forall y \in \mathbb{Z}$ gilt $\frac{y-2}{3} \in \mathbb{Z}$.
Für $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jedoch schon, da hier gilt: $\forall y \in \mathbb{R}$ ist $\frac{y-2}{3} \in \mathbb{R}$

Aufgabe 4

a)

$$
\begin{aligned}
& & f(X \cap Y) &= f(X) \cap f(Y) \\
&\Leftrightarrow & f(\{k_1 | k_1 \in X \wedge k_1 \in Y\}) &= f(\{k_1 | k_1 \in X\}) \cap f(\{k_1 | k_1 \in Y\})
\end{aligned}
$$

Da f injektiv ist, wird jedem Ursprungselement aus X bzw. Y (k_1) eindeutig ein Zielelement aus N (k_2) zugeordnet.

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow & \{k_2 | k_2 \in N \wedge k_2 \in N\} &= \{k_2 | k_2 \in N\} \cap \{k_2 | k_2 \in N\} \\
&\Leftrightarrow & \{k_2 | k_2 \in N\} &= \{k_2 | k_2 \in N \wedge k_2 \in N\} \\
&\Leftrightarrow & \{k_2 | k_2 \in N\} &= \{k_2 | k_2 \in N\}
\end{aligned}
$$

(w)

b) Da die Abbildung $f : M \rightarrow N$ injektiv ist, sowie $Y \subseteq N$ und $X \subseteq M$ ist, gilt folgendes:

$$
\begin{aligned}
f(X) &= \{b | b \in Y \wedge \exists x \in X \ \ mit \ \ b = f(x)\} \\
f^{-1}(Y) &= \{a | a \in X \ \ mit \ \ f(a) \in Y\}
\end{aligned}
$$

allgemeiner:

$$
\begin{aligned}
f &: X \rightarrow Y \\
f^{-1} &: Y \rightarrow X
\end{aligned}
$$

Daher bildet $f^{-1}(f(X))$ auf X ab.