Übungsblatt 2 *(Gruppe 1, Herr Broß)*

**Florian Weßling**
**ES0000000000**

# Aufgabe 1

a) **Induktionsbehauptung:**

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = A(n)$$

**Induktionsanfang:**

$$A(1) = \sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = \frac{1(1+1)(2*1+1)}{6} = \frac{1*2*3}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Der Induktionsanfang A(1) gilt somit.

**Induktionsvoraussetzung:** A(r) ist wahr für ein $n \in \mathbb{N}$ und alle $r \in \mathbb{N}$ $(r \leq n)$.

**Induktionsschritt:** $n \rightarrow n+1$

$$A(n+1) = \sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2 \tag{1}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \tag{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n^2+2n+1)}{6} \tag{3}$$

$$= \frac{2n^3 + n^2 + 2n^2 + n + 6n^2 + 12n + 6}{6} \tag{4}$$

$$= \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6} \tag{5}$$

$$A(n+1) = \sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6} \tag{6}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \tag{7}$$

$$= \frac{(n^2+2n+n+2)(2n+3)}{6} \tag{8}$$

$$= \frac{2n^3 + 3n^2 + 4n^2 + 6n + 2n^2 + 3n + 4n + 6}{6} \tag{9}$$

$$= \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6} \tag{10}$$

Da (5) = (10) gilt, ist die Behauptung wahr.

b) $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Sei $|M_n| = n$, so ist die **Induktionsbehauptung**: $A(n) = |P(M_n)| = 2^n$.

**Induktionsanfang:**

$$A(1) = |P(M_1)| = 2^1 = 2 \text{ mit } |M_1| = 1$$
$$A(0) = |P(M_0)| = 2^0 = 1 \text{ mit } |M_0| = 0$$

A(1) und A(0) gelten somit.

**Induktionsvoraussetzung:** A(r) ist wahr für ein $n \in \mathbb{N}$ und alle $r \in \mathbb{N}$ $(r \leq n)$.

**Induktionsschritt:** $n \to n+1$

Zu zeigen: $A(n+1) = |P(M_{n+1})| = 2^{n+1}$ für $|M_{n+1}| = n+1$.

$M_{n+1} = M_n \cup \{x\}$ (x sei ein zusätzliches Element)

Die Potenzmenge von $M_{n+1}$ hat doppelt so viele Elemente wie die Potenzmenge von $M_n$, da für das zusätzliche Element erneut die Teilmenge mit jedem vorhandenen Element gebildet werden muss. Somit gilt:

$$|P(M_{n+1})| = 2 \cdot |P(M_n)| = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

## Aufgabe 2

a)

$$A = \begin{pmatrix} \mu & -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ \mu & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mid \cdot -2 \\ + \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -2+\mu & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mid \cdot 3 \; + \\ \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2+\mu & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ + \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Fall 1:** $\mu \neq 0$
Aus Zeile 3 der letzten Matrix folgt: $\mu x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$
Dementsprechend folgt aus Zeile 2: $2x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0$
Zeile 1 kann man entnehmen: $-x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3 \Leftrightarrow x_3 = -1$

Somit existiert eine eindeutige Lösung und die Lösungsmenge des LGS ist $L = \{(0, 0, -1)\}$.

**Fall 2:** $\mu = 0$
Es ergibt sich eine vollständige Nullzeile.
Wenn man nun $x_1 := r$ definiert ergibt sich aus Zeile 2: $2x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow 2r = x_2$.
Zeile 3 ergibt:

$$\begin{aligned} && -x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 3 \\ \Leftrightarrow && -r + 2 \cdot 2r - 3x_3 &= 3 \\ \Leftrightarrow && 3r &= 3 + 3x_3 \\ \Leftrightarrow && r &= 1 + x_3 \\ \Leftrightarrow && r - 1 &= x_3 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Lösungsmenge in Abhängigkeit von r:

$$L = \{(r, 2r, r-1) | r \in \mathbb{R}\}$$

b) Voraussetzung:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ mit } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Es ist eine Matrix B gesucht, sodass gilt:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B muss somit die Umkehrmatrix von A sein, damit das Produkt die Einheitsmatrix ergibt.
Bedingung für a, b, c und d:

$$\det(A) = ad - cb \neq 0$$

$$B = A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - cb} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

## Aufgabe 3

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \qquad a + b = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

a)

$$\alpha_1(x, y, z) = (2x + y, z)\ \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

Zu zeigen:

$$\begin{aligned}
& & \alpha_1(a + b) &= \alpha_1(a) + \alpha_1(b) \\
&\Leftrightarrow & \alpha_1 \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2a_1 + a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2b_1 + b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 2(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2a_1 + a_2 + 2b_1 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 2a_1 + 2b_1 + a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2a_1 + 2b_1 + a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

*(w)*

Zu zeigen:

$$\begin{aligned}
& & \alpha_1(\lambda a) &= \lambda \cdot \alpha_1(a) \\
&\Leftrightarrow & \alpha_1 \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix} &= \lambda \cdot \alpha_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 2\lambda a_1 + \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix} &= \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2a_1 + a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} \lambda(2a_1 + a_2) \\ \lambda a_3 \end{pmatrix} &= \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2a_1 + a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow & \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2a_1 + a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} &= \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2a_1 + a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

*(w)*

Somit ist $\alpha_1$ eine lineare Abbildung.

b)

$$\alpha_2(x, y, z) = (x + y + 1, y - z)\ \forall(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

Gegenbeispiel:
Der Nullvektor wird nicht auf den Nullvektor abgebildet und somit ist $\alpha_2$ keine lineare Abbildung.

$$\alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+1 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c)

$$\alpha_3(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, x + z)\ \forall(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

Widerlegung der Bedingung $\alpha_3(\lambda a) = \lambda \cdot \alpha_3(a)$

Seien $a = (2, 0, 0) \wedge \lambda = 3$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \alpha_3(3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \alpha_3 \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 6^2 + 0^2 + 0^2 \\ 6+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 6 \end{pmatrix} \\ \neq 3 \cdot \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= 3 \cdot \begin{pmatrix} 2^2 + 0^2 + 0^2 \\ 2+0 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Somit ist $\alpha_3$ keine lineare Abbildung.

d)

$$\alpha_4(x, y, z) = (x + 2y + 3z, x + y + z)\ \forall(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

Zu zeigen:

$$\begin{aligned} \alpha_4(a) + \alpha_4(b) &= \alpha_4(a + b) \\ &= \alpha_4 \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_1 + b_1) + 2(a_2 + b_2) + 3(a_3 + b_3) \\ (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + 2a_2 + 3a_2 & + & b_1 + 2b_2 + 3b_3 \\ a_1 + a_2 + a_2 & + & b_1 + b_2 + b_3 \end{pmatrix} \\ &= \alpha_4(a) + \alpha_4(b) \end{aligned}$$

*(w)*

Zu zeigen:

$$
\begin{aligned}
\lambda \cdot \alpha_4(a) &= \alpha_4(\lambda a) \\
&= \alpha_4(\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}) \\
&= \alpha_4 \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda a_1 + 2\lambda a_2 + 3\lambda a_3 \\ \lambda a_1 + \lambda a_2 + \lambda a_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda(a_1 + 2a_2 + 3a_3) \\ \lambda(a_1 + a_2 + a_3) \end{pmatrix} \\
&= \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 + 2a_2 + 3a_3 \\ a_1 + a_2 + a_3 \end{pmatrix} \\
&= \lambda \cdot \alpha_4 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \\
&= \lambda \cdot \alpha_4(a)
\end{aligned}
\tag{w}
$$

Somit ist $\alpha_4$ eine lineare Abbildung.

## Aufgabe 4

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \qquad a + b = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

a) $U = \{(a_1, a_2, a_3) | a_1 + a_2^2 + a_3^3 = 0\}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U \Rightarrow U \neq \emptyset$$

Sei $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \lambda = 2.$

$a \in U$, da $0 + 1^2 - 1^3 = 0$.

Zu zeigen: $\lambda a \in U$:

$$\lambda a = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Überprüfung der Bedingung für die Elemente von U: $0 + 2^2 - 2^3 = 0 \Rightarrow -4 = 0$ *(f)*
Daher ist $\lambda a \notin U$ und dementsprechend U kein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

b) $U = \{(a_1, a_2, a_3) | a_1 = 0 \wedge a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0\} = \{(a_1, a_2, a_3) | a_1 = 0 \wedge 2a_2 + 3a_3 = 0\}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U \Rightarrow U \neq \emptyset$$

Zu zeigen: $\lambda a \in U$

$$\begin{aligned} \lambda a = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix} &\Rightarrow 2\lambda a_2 + 3\lambda a_3 &&= 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda \cdot (2a_2 + 3a_3) &&= 0 \quad \textit{(gemäß Bedingung von U)} \\ &\Leftrightarrow \lambda \cdot 0 &&= 0 \\ & && \quad \textit{(w)} \end{aligned}$$

$\Rightarrow a \in U \wedge \lambda a \in U$

Zu zeigen: $a + b \in U$

$$a + b = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow 2(a_2 + b_2) + 3(a_3 + b_3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a_2 + 2b_2 + 3a_3 + 3b_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a_2 + 3a_3 \quad + \quad 2b_2 + 3b_3 = 0 \quad \textit{(gemäß Bedingung von U)}$$

$$\Leftrightarrow 0 + 0 = 0$$

*(w)*

Somit ist U ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

c) $U = \{(a_1, a_2, a_3) | 5a_1 + 7a_2 + 11a_3 = 13\}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U \Rightarrow U \neq \emptyset$$

Seien $\lambda = 2 \wedge a = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Überprüfen der Bedingung von U:

$$5(-\frac{1}{5}) + 7 \cdot 2 + 11 \cdot 0 = 13$$

$$\Leftrightarrow \quad -1 + 14 = 13$$

*(w)*

$\Rightarrow a \in U$

Zu zeigen: $\lambda a \in U$

$$\Rightarrow \lambda a = 2 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Überprüfen der Bedingung von U:

$$5(-\frac{2}{5}) + 7 \cdot 4 + 11 \cdot 0 = 13$$

$$\Leftrightarrow \quad -2 + 28 + 0 = 13$$

$$\Leftrightarrow \quad 26 = 13$$

*(f)*

$\Rightarrow \lambda a \notin U \qquad \Rightarrow$ U ist kein Unterraum von $\mathbb{R}^3$