Übungsblatt 3 *(Gruppe 1, Herr Broß)*

Florian Weßling
ES0000000000

Aufgabe 1

a) Damit $X = Y$ gilt, müssen die Basen der beiden Erzeugendensysteme gleich sein.

Basis von X: Seien die drei Vektoren von X die Zeilenvektoren der Marix A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} | \cdot -1 \\ \\ + \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ | \cdot -1 \\ + \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die ersten zwei Zeilenvektoren der entstandenen Matrix in Treppenform sind die Basisvektoren: $(1, -1, 0), (0, 1, -1)$ Dies sind die beiden Vektoren aus Y. Da sie linear unabhängig sind und somit die Basis von Y (sowie X) bilden gilt $X = Y$.

b) $Y = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 | a + b + c = 0\}$

Mit x_1 und x_2 als Basisvektoren hat jeder Vektor w aus Y allgemein die folgende Gestalt:

$$w = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 - \lambda_1 \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Damit die Behauptung stimmt, muss jeder Vektor die Bedingung $a+b+c = 0$ erfüllen:

$$\begin{aligned} & \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 0 = 0 \end{aligned}$$

(w)

Aufgabe 2

a) α ist eine lineare Abbildung, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $\alpha(\vec{0}) = \vec{0}$
2. $\lambda\alpha(a) = \alpha(\lambda a)$
3. $\alpha(a+b) = \alpha(a) + \alpha(b)$

1.) $\alpha((0,0,0,0)) = (0+0, 0-0) = (0,0)$

2.)

$$\begin{aligned} & & \lambda\alpha(a) &= \alpha(\lambda(a_1,a_2,a_3,a_4)) \\ \Leftrightarrow & & \lambda\alpha((a_1,a_2,a_3,a_4)) &= \alpha((\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3, \lambda a_4)) \\ & & &= (\lambda a_1 + \lambda a_2, \lambda a_3 - \lambda a_4) \\ & & &= \lambda(a_1+a_2, a_3-a_4) \\ & & &= \lambda\alpha((a_1,a_2,a_3,a_4)) \end{aligned} \tag{w}$$

3.)

$$\begin{aligned} & & \alpha(a+b) &= \alpha(a) + \alpha(b) \\ \Leftrightarrow & & \alpha\left(\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \\ a_4+b_4 \end{pmatrix}\right) &= \alpha\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}\right) + \alpha\left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}\right) \\ & & &= \begin{pmatrix} a_1+a_2 \\ a_3-a_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1+b_2 \\ b_3-b_4 \end{pmatrix} \\ & & &= \begin{pmatrix} a_1+a_2+b_1+b_2 \\ a_3-a_4+b_3-b_4 \end{pmatrix} \\ & & &= \begin{pmatrix} a_1+b_1 & + & a_2+b_2 \\ a_3+b_3 & - & (a_4+b_4) \end{pmatrix} \\ & & &= \alpha\left(\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \\ a_4+b_4 \end{pmatrix}\right) \end{aligned} \tag{w}$$

Somit ist α eine lineare Abbildung.

b) Die Bilder der Einheitsvektoren sind die Spaltenvektoren der gesuchten Matrix.

$$\alpha((1,0,0,0)) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$
$$\alpha((0,1,0,0)) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$
$$\alpha((0,0,1,0)) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$
$$\alpha((0,0,0,1)) = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$

Daraus folgt die gesuchte Matrix:

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha(v) = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix} \cdot v$$

c)

$$\mathrm{Ker}(\alpha) = \{v \in \mathbb{R}^4 | \alpha(v) = \vec{0}\}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & \alpha((a,b,c,d)) = (a+b, c-d) = \vec{0} \quad \wedge \quad (a,b,c,d) \in \mathrm{Ker}(\alpha)\\
\Leftrightarrow \quad & a+b=0 \quad \wedge \quad c-d=0\\
\Rightarrow \quad & \mathrm{Ker}(\alpha) = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 | a+b=0 \wedge c-d=0\}
\end{aligned}$$

d) Das Bild $\mathrm{Im}(\alpha)$ ist definiert durch das Erzeugendensystem $\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} \right\rangle$.

Man kann nun die Basis bestimmen indem man eine Matrix mit den Vektoren als Zeilenvektoren erstellt:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\\0 & 1\\0 & -1\end{pmatrix} \begin{matrix} | \cdot -1 \\ \longleftarrow + \\ \\ \longleftarrow + \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\\0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} \begin{matrix} \\ | \cdot -1 \\ \longleftarrow + \\ \\ \end{matrix}$$

Die übrigen Vektoren bilden die Basis des Erzeugendensystems: $(1,0), (0,1)$
Genau diese bilden die Standardbasis des Raumes $\mathbb{R}^2$. Somit gilt: $\mathrm{Im}(\alpha) = \mathbb{R}^2$

Aufgabe 3

Damit das Bild von A dem Erzeugendensystem $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$ entspricht, muss jeder dieser Vektoren als Linearkombination der Spaltenvektoren der Matrix darstellbar sein.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Somit gilt:

$$\mathrm{Im}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Aufgabe 4

a) Durch die Injektivität von α gilt: Aus $\alpha(a) = \alpha(b)$ folgt stets $a = b$.
Der Kern besteht aus allen Vektoren, die auf den Nullvektor abgebildet werden. Sei a nun der Vektor, der auf den Nullvektor abgebildet wird und im Kern liegt, so kann aus der Injektivitäts-Bedingung kein anderer Vektor b auf den selben Vektor (den Nullvektor) abgebildet werden. Da nur a auf den Nullvektor abgebildet werden kann, kann auch nur der Nullvektor a das einzige Element des Kerns sein.