Übungsblatt 4 *(Gruppe 1, Herr Broß)*

Florian Weßling
ES0000000000

Aufgabe 1

1.) Ist $U \cap V$ auch Unterraum?
$x, y \in U \wedge x, y \in V \Rightarrow x, y \in U \cap V$
Da U und V Unterräume sind, gilt: $\forall x, y \in U \cap V : \lambda x \in U \cup V \wedge x + y \in U \cap V$
Der Nullvektor muss in U und V liegen und liegt somit auch in $U \cap V$.
Daher ist $U \cap V$ auch ein Unterraum.

2.) Ist $U + V$ auch ein Unterraum?
Sei $U = V$. Somit ist $x \in U \wedge y \in V$ mit $x + y \in U \cap V$. So ist auch jedes Element z aus $U + V$ mit $z = 2x$ in $U \cap V$ enthalten.
($U \cap V$ ist Unterraum: Siehe Aufgabe 1.1)

3.) Wenn U und V z.B. zwei Unterräume von $\mathbb{R}^3$ sind und zwei parallele Ebenen beschreiben, so ist die Vereinigung beider Mengen nicht zusammenhängeng bzw. geschlossen. Hier können die Bedingungen für einen Unterraum nicht mehr gelten:

$$\vec{0} \in U \quad \wedge \quad \lambda x \in U \quad \wedge \quad x + y \in U \qquad (x, y \in U)$$

Aufgabe 2

a)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 5 & 3 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid \cdot 2 \\ + \\ + \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \mid \cdot -2 \quad + \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

b)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid \cdot 2 \quad + \\ \mid \cdot 2 \quad + \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid \cdot -2 \\ + \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid : 2 \\ \mid : 2 \\ \mid : 2 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

a) Erzeugen einer Matrix mit den besagten Vektoren als Zeilenvektoren:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -7 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid \cdot -1 \\ \\ \mid \cdot -1 \quad \mid \cdot -1 \\ \mid \cdot -2 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \mid \cdot -2 \\ \\ \mid \cdot -1 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \mid : 2 \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \mid : 2 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Somit entspricht die Basis den Zeilenvektoren der Matrix und ergibt somit das minimale Erzeugendensystem $\langle(1, 2, -2, 2, -1), (0, 0, 1, 1, -1)\rangle$.
Die Basis enthält zwei Vektoren. Somit ist die Dimension der Basis 2.

b) Erzeugen einer Matrix mit den Spaltenvektoren von A als Zeilenvektoren:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid \cdot -3 \\ \\ \mid \cdot 2 \; + \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \mid : -4 \; + \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid : -2 \; + \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Somit ist die Basis $\langle (1, -2, 1), (0, 1, 1) \rangle$. Da zwei Vektoren die Basis bilden ist die Dimension des Bildes 2: $\dim(\mathrm{Im}(A)) = 2$

Aus Satz 6.10 mit $n = 4$ (Dimension des Ausgangsraumes) folgt:

$$\begin{aligned} & & n &= \dim(\mathrm{Ker}(A)) + \dim(\mathrm{Im}(A)) \\ \Rightarrow & & 4 &= \dim(\mathrm{Ker}(A)) + 2 \\ \Leftrightarrow & & \dim(\mathrm{Ker}(A)) &= 4 - 2 = 2 \end{aligned}$$

Aufgabe 4

a)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad | \cdot -1$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad | \cdot -1$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aus der zweiten Zeile folgt $\lambda_3 = 0$, dementsprechend aus der dritten Zeil $\lambda_2 = 0$ und schließlich aus der ersten $\lambda_1 = 0$. Da die Linearkombination nur die Nulllösung als Lösung hat, sind die Vektoren linear unabhängig.

b)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \mid \cdot -1 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es ergibt sich eine vollständige Nullzeile und es bleiben drei Gleichungen mit vier Variablen übrig. Somit gibt es unendlich viele Lösungen für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und λ_4. Die Vektoren sind also linear abhängig.