Florian Weßling
ES0000000000

Aufgabe 1

a)

$$
\begin{pmatrix}
2 & 1 & 3 & -1 & -2 & -2 \\
-1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -4 \\
4 & 2 & 6 & -2 & 1 & 11 \\
-3 & -1 & -4 & 2 & -1 & -8
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
+ \\
\mid \cdot -3 \quad \mid \cdot 4 \quad \mid \cdot 2 \\
+ \\
+
\end{array}
$$

$$
\rightsquigarrow
\begin{pmatrix}
-1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -4 \\
0 & 1 & 1 & 1 & -4 & -10 \\
0 & 2 & 2 & 2 & -3 & -5 \\
0 & -1 & -1 & -1 & 2 & 4
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
\\
+ \\
+ \\
\mid \cdot 2
\end{array}
$$

$$
\rightsquigarrow
\begin{pmatrix}
-1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\
0 & -1 & -1 & -1 & 2 & 4
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
\\
+ \\
\mid \cdot 2 \\
\\
\end{array}
$$

Nun erweitert man die Matrix um Nullzeilen mit -1 in der Diagonale.

$$
\rightsquigarrow
\begin{pmatrix}
-1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -4 \\
0 & -1 & -1 & -1 & 2 & 4 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3
\end{pmatrix}
$$

Die Spalten in der die Zeilen mit der -1 eingefügt wurden sind nun die Basisvektoren des Kerns. Die letzte Spalte entspricht dem Konstantenvektor a.

$$
b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad
b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad
a = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}
$$

Die Lösungsmenge ist somit $L = \{a + \lambda b_1 + \mu b_2 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

Aufgabe 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & \lambda & \mu \end{pmatrix} \begin{matrix} \mid \cdot -2 \quad \mid \cdot -1 \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & -4 \\ 0 & -2 & 1+\lambda & \mu - 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mid \cdot -1 \\ \leftarrow + \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & \lambda - 4 & \mu + 3 \end{pmatrix}$$

Die Matrix ist nun in Treppenform. Von der letzten Zeile hängt nun die Lösungsmenge ab.

a) **Keine Lösung**
Damit das Gleichungssystem keine Lösung hat, muss folgendes gelten: $\lambda - 4 = 0$ sowie $\mu + 3 \neq 0$. (Somit ist $\lambda = 4$ und $\mu \neq -3$)
Daraus ergibt sich ein Widerspruch und dementsprechend ist die Lösungsmenge z.B. für $\lambda = 4$ und $\mu = 0$ leer.

b) **Genau eine Lösung**
Für exakt eine Lösung muss man der letzten Zeile ein bestimmtes x_3 entnehmen können.
Deswegen benötigt man $\lambda - 4 \neq 0$ und $\mu \in \mathbb{R}$ beliebig.
Eine exakte Lösung lässt sich also für zum Beispiel angeben für: $\lambda = 5$ und $\mu = -2$

Aus Zeile 3 folgt:

$$\begin{aligned} & & (\lambda - 4) \cdot x_3 &= \mu + 3 \\ \Rightarrow & & (5 - 4) \cdot x_3 &= -2 + 3 \\ \Leftrightarrow & & x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Aus Zeile 2 folgt:

$$\begin{aligned} & -2x_2 + 5x_3 = -4 \\ \Rightarrow\quad & -2x_2 = -9 \\ \Leftrightarrow\quad & x_2 = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Aus Zeile 1 folgt:

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ \Rightarrow\quad & x_1 + \frac{9}{2} - 1 = 1 \\ \Leftrightarrow\quad & x_1 = -\frac{7}{2} \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge für $\lambda = 5$ und $\mu = -2$ ist somit $L = \{(-\frac{7}{2}, \frac{9}{2}, 1)\}$.

c) **Unendlich viele Lösungen**
Damit man unendlich viele Lösungen erhält muss man aus der letzten Zeile eine vollständige Nullzeile machen.
Eine vollständige Nullzeile erhält man mit $\lambda = 4$ und $\mu = -3$.

Wähle $r := x_3$

Aus Zeile 2 folgt:

$$\begin{aligned} & -2x_2 + 5x_3 = -4 \\ \Leftrightarrow\quad & x_2 = 2 + \frac{5}{2}x_3 = \frac{9}{2}x_3 = \frac{9}{2}r \end{aligned}$$

Aus Zeile 1 folgt:

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ \Rightarrow\quad & x_1 + \frac{9}{2}r - r = 1 \\ \Leftrightarrow\quad & x_1 = 1 - \frac{7}{2}r \end{aligned}$$

Somit ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems: $L = \{(1 - \frac{7}{2}r, \frac{9}{2}r, r) \mid r \in \mathbb{R}\}$

Aufgabe 3

Um den Rang einer Matrix zu bestimmen, muss man die Matrix auf Treppenform bringen und somit die Basis des Zeilenraums bestimmen. Die Anzahl der Vektoren, die nicht dem Nullvektor entsprechen, ist der Rang der Matrix.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 11 \\ 7 & 8 & 9 & 12 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid \cdot -4 \quad \mid \cdot -7 \\ \quad + \\ \qquad\qquad + \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & -3 & -6 & -29 \\ 0 & -6 & -12 & -58 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid \cdot -2 \\ \quad + \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & -3 & -6 & -29 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es bleiben zwei Vektoren übrig. Somit ist die Dimension der Basis 2 und daher der Rang der Matrix: $rg(A) = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -7 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid \cdot -1 \quad \mid \cdot -2 \quad \mid \cdot -1 \\ \quad + \\ \qquad\qquad + \\ \qquad\qquad\qquad + \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid \cdot 3 \\ \quad + \\ \\ \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad rg(A) = 3$$

Aufgabe 4

a)

$$(A,E) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \mid \cdot 3 \quad \mid \cdot -2 \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 10 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -6 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mid \cdot 5 \\ \mid \cdot 8 \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 10 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mid \cdot 8 \\ \mid \cdot -3 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 8 & 0 & -6 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 8 & 10 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \mid \cdot -5 \quad \mid \cdot 3 \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 24 & 12 & -4 \\ 0 & 8 & 0 & -40 & -24 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mid :8 \\ \mid :8 \\ \mid :2 \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = (E, A^{-1})$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -5 & -3 & 1 \\ 4 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b)

$$(A,E) = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ -7 & -6 & -8 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mid \cdot 4 \\ \mid \cdot 7 \quad \mid \cdot -1 \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -45 & -18 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 15 & 6 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \mid \cdot 3 \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 15 & 6 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix A ist nicht invertierbar, da in dem linken 3×3-Teil der Matrix eine Nullzeile auftaucht und somit die Einheitsmatrix unmöglich macht.

c)

$$
(A,E)=\left(\begin{array}{cccccccc}
2 & -1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0\\
-3 & 3 & -5 & -8 & 0 & 1 & 0 & 0\\
1 & -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0\\
-1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ \\ \mid \cdot 3 \\ \qquad\qquad \mid \cdot 2
\end{array}
$$

$$
\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccccc}
-1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0\\
0 & -1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1\\
0 & -1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 2
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \mid \cdot -1
\end{array}
$$

$$
\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccccc}
-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1\\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0\\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1\\
0 & -1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 2
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\mid :(-1) \\ \\ \mid :(-1) \\ \mid :(-1)
\end{array}
$$

$$
\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccccc}
-1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -3 & -1\\
0 & 1 & -1 & -4 & -1 & 0 & 0 & -2\\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1
\end{array}\right)
$$

$$
\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -4 & 0\\
0 & 1 & 0 & -3 & -1 & 1 & 3 & -2\\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \mid \cdot -1 \qquad \mid \cdot 3
\end{array}
$$

$$
\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -4 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1\\
0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 4 & -1\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1
\end{array}\right) = (E, A^{-1})
$$

$$
\Rightarrow \quad A^{-1}=\begin{pmatrix}
1 & -1 & -4 & 0\\
2 & 1 & 0 & 1\\
-1 & 1 & 4 & -1\\
1 & 0 & -1 & 1
\end{pmatrix}
$$