Florian Weßling
ES0000000000

Aufgabe 1

a) Die Umformung der Matrix und die entsprechende Einheitsmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid \cdot -4 \\ \longleftarrow + \\ \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid \cdot -4 \\ \longleftarrow + \\ \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = V$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid \cdot -7 \\ \\ \longleftarrow + \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid \cdot -7 \\ \\ \longleftarrow + \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{pmatrix} = W$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \\ 0 & -6 & -12 & -18 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid \cdot -2 \\ \longleftarrow + \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid \cdot -2 \\ \longleftarrow + \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = X$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid : -3 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid : -3 \quad \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Y$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \longleftarrow + \\ \mid \cdot -2 \\ \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \longleftarrow + \\ \mid \cdot -2 \\ \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Z$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = T$$

Die Matrixumformungen können nun als wiederholte Matrixmultiplikation mit den entsprechenden Elementarmatrizen dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \underbrace{Z \cdot Y \cdot X \cdot W \cdot V}_{=U} \cdot A &= T \\ \Rightarrow \qquad U \cdot A &= T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U &= Z \cdot Y \cdot X \cdot W \cdot V \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T &= U \cdot A \\ \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 2

$$\begin{aligned}
det\,A &= \lambda \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & \lambda \end{pmatrix} - (-1) \cdot det \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} + (-1) \cdot det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \lambda(1\lambda - 2 \cdot 2) + (4\lambda - 1 \cdot 2) - (4 \cdot 2 - 1 \cdot 1) \\
&= \lambda(\lambda - 4) + (4\lambda - 2) - (8 - 1) \\
&= \lambda^2 - 4\lambda + 4\lambda - 2 - 7 \\
&= \lambda^2 - 9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow && det\,A = 0 \\
\Leftrightarrow && \lambda^2 - 9 = 0 \\
\Leftrightarrow && \lambda^2 = 9 \\
\Leftrightarrow && \lambda = 3 \vee \lambda = -3
\end{aligned}$$

Für $\lambda = 3 \vee \lambda = -3$ ist die Determinante von A somit null.

Aufgabe 4